TENTAMEN KVANTFYSIK SI1151
Onsdag 150107 kl. 14.00-19.00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	Teoretisk fysiks formelsamling, BETA, miniräknare
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En partikel med massa m är i en endimensionell oändlig potentialbrunn som ges av

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

Vågfunktion vid tiden $t = 0$ är en superposition av de två lägsta energiegentillstånden:

$$\Psi(x, 0) = C(\psi_1(x) + \psi_2(x))$$

(a) Bestäm värdet på konstanten C.

(b) Bestäm tillståndet vid tiden t.

(c) Bestäm rörelsemängdens väntevärde vid tiden t.

2. 24 elektroner är instängda i en kubisk oändlig potentialbrunn med sidlängd L och volym $V = L^3$. Bestäm grundtillståndsenergin om växelverkan mellan elektronerna kan försummas. Vad blir svaret för 24 identiska bosoner?

3. En partikel med massa m kan röra sig i en dimension och är bunden av en delta-funktionspotential $V(x) = -\alpha\delta(x)$ där $\alpha > 0$ är en konstant. Bestäm vågfunktionen och energin.

VÄND!

4. En endimensionell harmonisk oscillator störs av en potential $H' = \frac{1}{2}sx^2$ där $s > 0$ är en konstant. Bestäm första och andra ordningens korrektioner till grundtillståndsenergin med störningsräkning. Tag fram den exakta grundtillståndsenergin till det störda problemet, serieutveckla resultatet, och jämför med resultatet från störningsräkningen.

5. Följande problem är centralt för magnetisk resonans metoden. Hamiltonianen för ett spinn 1/2 i ett magnetfält med en konstant komponent B_0 i z-riktningen och en tidsberoende komponent $B_1(\mathbf{e}_x \cos\omega t + \mathbf{e}_y \sin\omega t)$ i xy-planet är

$$H = \omega_0 S_z + \omega_1[\cos(\omega t)S_x + \sin(\omega t)S_y]$$

där S_x, S_y, S_z är spinnoperatorer, och $\omega_0 = eB_0/m, \omega_1 = eB_1/m$ är konstanter. Tillståndet vid tiden $t = 0$ är $\chi = \chi_+$, dvs spinn upp i z-riktningen. Antag att systemet är i resonans: $\omega = \omega_0$. Lös tidsberoende Schrödinger-ekvationen. Bestäm sannolikheten att en mätning ger spinn upp i z-riktningen vid tiden t.

Ledning: Ansätt $\chi(t) = a_+(t)\chi_+ + a_-(t)\chi_-$, $c_\pm(t) = a_\pm(t)e^{\pm i\omega t/2}$.

LYCKA TILL!

Oändlig potentialbrunn:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \ , \ \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin k_n x \ , \ k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Harmonisk oscillator:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \ , \ a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x) \ , \ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x)$$

Störningsteori:

$$E_n^1 = \langle\psi_n^0|H'|\psi_n^0\rangle \ , \ E_n^2 = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle\psi_m^0|H'|\psi_n^0\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

Spinn 1/2 operatorer:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösning till tentamen i Kvantfysik 150107

1. (a) Normering: Eftersom egenfunktionerna är ON blir

$$|C^2|\int(\psi_1+\psi_2)^*(\psi_1+\psi_2)dx = |C^2|\int(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+\psi_1^*\psi_2+\psi_2^*\psi_1)dx$$

$$= |C^2|(1+1+0+0) = 1$$

Välj $C = 1/\sqrt{2}$

(b) Tillståndet vid tiden t ges av

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}+\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar})$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2}(\sin(\pi x/a)e^{-i\hbar\pi^2t/2ma^2}+\sin(2\pi x/a)e^{-i4\hbar\pi^2t/2ma^2})$$

(c) Rörelsemängdsväntevärdet:

$$\langle p(t)\rangle = \int \Psi^*\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi dx$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\left(\int \psi_1^*(x)e^{+iE_1t/\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \int \psi_2^*(x)e^{+iE_2t/\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right.$$
$$\left. + \int \psi_2^*(x)e^{+iE_2t/\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \int \psi_1^*(x)e^{+iE_1t/\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right)$$

Beräkna integralerna, utelämna komplexkonjugeringen eftersom ψ_n är valda reella här:

$$\int \psi_n(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi_n(x) = \frac{1}{2}\psi_n^2(x)\Big|_0^a = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x) = \frac{2k_1}{a}\int_0^a \sin(k_2x)\cos(k_1x)\,dx = [y=\pi x/a] = \frac{2}{a}\int_0^\pi \sin(2y)\cos y\,dy =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\pi[\sin(3y)+\sin y]\,dy = \frac{1}{a}\left[-\frac{\cos(3y)}{3}-\cos y\right]_0^\pi = \frac{1}{a}\left[\frac{2}{3}+2\right] = \frac{8}{3a}$$

$$\int \psi_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x) = \underbrace{\psi_1(x)\psi_2(x)|_0^a}_{=0} - \int \psi_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x) = -\frac{8}{3a}$$

Samla allt:

$$\langle p(t)\rangle = \frac{\hbar}{2i}\frac{8}{3a}\left[e^{+i(E_2-E_1)t/\hbar}-e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\right] = \frac{8\hbar}{3a}\sin(E_2-E_1)t/\hbar$$

2. Enpartikelenerginivåerna är

$$E_{ijk} = \underbrace{\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}}_{=A}(i^2 + j^2 + k^2), i, j, k = 1, 2, 3, ...$$

De lägsta nivåerna är:

$$E_{111} = 3A, E_{211} = E_{121} = E_{112} = 6A, E_{221} = E_{212} = E_{122} = 9A,$$

$$E_{311} = E_{131} = E_{113} = 11A, E_{222} = 12A,$$

$$E_{123} = E_{132} = E_{213} = E_{231} = E_{312} = E_{321} = 14A$$

Pauli-principen säger att endast en elektron kan finnas i varje enpartikeltillstånd. I varje enpartikeltillstånd $|ijk\rangle$ ryms alltså två elektroner, en med spinn upp och en med spinn ner. De 24 elektronerna fyller upp grundtillståndet så här: 2 med energi $3A$, 6 med energi $6A$, 6 med energi $9A$, 6 med energi $11A$, 2 med energi $12A$, 2 med energi $14A$. Grundtillståndsenergin blir alltså

$$E_0 = (2 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 6 \cdot 11 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 14)A = 214A = 214\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \text{ (elektroner)}$$

För bosoner finns ingen Pauliprincip och alla 24 ryms i grundtillståndet:

$$E_0 = 24 \cdot 3A = 72\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \text{ (bosoner)}$$

3. Sök bundna tillstånd med energi $E < 0$ till deltafunktionspotentialen. SE:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi(x)$$

För $x \neq 0$ är potentialen $= 0$ och vi kan sätta

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \kappa^2\psi \ , \ \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Allmän lösning:

$$\psi(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x}$$

Acceptabla lösningar är kontinuerliga i $x = 0$, och går mot noll i $x = \pm\infty$. Alltså är $A = B$. Lösningen för alla x blir därför

$$\psi(x) = Ae^{-\kappa|x|}$$

Bestäm κ genom att integrera SE kring $x = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2\psi}{dx^2}dx}_{=\psi'(\epsilon)-\psi'(-\epsilon)=-2A\kappa} -\alpha \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\psi(x)dx}_{=A} = E \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi dx}_{\to 0, \epsilon\to 0} \Rightarrow \kappa = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

Energin blir

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

Normering:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2|A|^2 \int_0^{\infty} e^{-2\kappa x} dx = \frac{|A|^2}{\kappa} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\kappa} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

Oberoende av potentialens styrka α finns därför exakt ett bundet tillstånd som ges av

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2} \ , \ E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

4. Börja med den exakta lösningen:

$$H = H_0 + H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega'^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$$

där vi infört

$$\omega'^2 = \frac{s}{m}\ ,\ \Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2$$

Exakta grundtillståndsenergin är

$$E_0 = \frac{\hbar\Omega}{2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\omega^2 + \omega'^2} = \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^4 + ...\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega'^2}{4\omega} - \frac{\hbar\omega'^4}{16\omega^3} + ...$$

För störningsräkningen behövs

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^\dagger + a)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}[(a^\dagger)^2 + a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger]$$

Första ordningens korrektion:

$$E_0^1 = \frac{1}{2}m\omega'^2\langle 0|x^2|0\rangle = \frac{1}{2}m\omega'^2\frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|(a^\dagger)^2 + a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger|0\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega'^2}{4\omega}\left(\underbrace{\langle 0|(a^\dagger)^2|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|a^2|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|a^\dagger a|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|aa^\dagger|0\rangle}_{=1}\right) = \frac{\hbar\omega'^2}{4\omega}$$

vilket stämmer med det exakta uttrycket.

Andra ordningens korrektion:

$$E_0^2 = \sum_{m>0}\frac{|\langle m|H'|0\rangle|^2}{E_0 - E_m} = \frac{\hbar^2\omega'^4}{16\omega^2}\sum_{m>0}\frac{|\langle m|(a^\dagger)^2 + a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger|0\rangle|^2}{E_0 - E_m}$$

Den enda nollskilda termen i summan har $m = 2$:

$$\langle 2|(a^\dagger)^2|0\rangle = \sqrt{2}$$

Energinämnaren blir

$$E_0 - E_2 = -2\hbar\omega$$

Korrektionen blir alltså

$$E_0^2 = \frac{\hbar^2\omega'^4}{16\omega^2}\frac{2}{-2\hbar\omega} = -\frac{\hbar\omega'^4}{16\omega^3}$$

som stämmer med den exakta lösningen ovan.

5. SE: $H\chi = i\hbar\dot{\chi}$ ger

$$(\omega_0 S_z + \omega_1[\cos(\omega t)S_x + \sin(\omega t)S_y])\,\chi = i\hbar\dot{\chi}$$

Skriv spinntillståndet på matrisform som

$$\chi(t) = a_+(t)\chi_+ + a_-(t)\chi_- = \begin{pmatrix} a_+(t) \\ a_-(t) \end{pmatrix}$$

SE blir på matrisform

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ \omega_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+(t) \\ a_-(t) \end{pmatrix} = i\hbar\begin{pmatrix} \dot{a}_+ \\ \dot{a}_- \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_0 a_+ + \omega_1 e^{-i\omega t}a_- = 2i\dot{a}_+ \\ \omega_1 e^{+i\omega t}a_+ - \omega_0 a_- = 2i\dot{a}_- \end{cases}$$

Inför nu

$$a_\pm = c_\pm e^{\mp i\omega t/2} \Rightarrow \dot{a}_\pm = \mp\frac{i\omega}{2}c_\pm e^{\mp i\omega t/2} + \dot{c}_\pm e^{\mp i\omega t/2}$$

Detta ger:

$$\begin{cases} \omega_0 c_+ e^{-i\omega t/2} + \omega_1 e^{-i\omega t}c_- e^{+i\omega t/2} = 2i(-\frac{i\omega}{2}c_+ e^{-i\omega t/2} + \dot{c}_+ e^{-i\omega t/2}) \\ \omega_1 e^{+i\omega t}c_+ e^{-i\omega t/2} - \omega_0 c_- e^{+i\omega t/2} = 2i(+\frac{i\omega}{2}c_- e^{+i\omega t/2} + \dot{c}_- e^{+i\omega t/2}) \end{cases}$$

Förenkla mha resonansvillkoret $\omega_0 = \omega$:

$$\begin{cases} \omega_0 c_+ + \omega_1 c_- = 2i(-\frac{i\omega}{2}c_+ + \dot{c}_+) \\ \omega_1 c_+ - \omega_0 c_- = 2i(+\frac{i\omega}{2}c_- + \dot{c}_-) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{c}_+ = -i\frac{\omega_1}{2}c_- \\ \dot{c}_- = -i\frac{\omega_1}{2}c_+ \end{cases}$$

Derivera en gång till:

$$\begin{cases} \ddot{c}_+ = -i\frac{\omega_1}{2}\dot{c}_- = -\frac{\omega_1^2}{4}c_+ \\ \ddot{c}_- = -i\frac{\omega_1}{2}\dot{c}_+ = -\frac{\omega_1^2}{4}c_- \end{cases}$$

Med initialvillkoret $a_+(0) = c_+(0) = 1, a_-(0) = c_-(0) = 0$, dvs spinn upp, blir lösningen

$$\begin{cases} c_+(t) = \cos(\omega_1 t/2) \\ c_-(t) = \sin(\omega_1 t/2) \end{cases}$$

Sannolikheten att en mätning ger spinn upp blir

$$P_+(t) = |a_+(t)|^2 = |c_+(t)|^2 = \cos^2(\omega_1 t/2)$$

Kontroll:

$$P_+ + P_- = \cos^2(\omega_1 t/2) + \sin^2(\omega_1 t/2) = 1$$

OK.